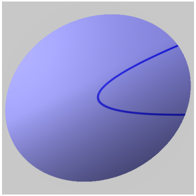
Singularitäten und Computeralgebra

Anne Frühbis-Krüger

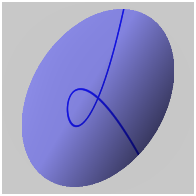
Institut für Algebraische Geometrie
Leibniz Universität Hannover

Kassel, 11. Mai 2012

Kurven mit und ohne Singularitäten

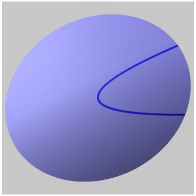


$y^2 - x = 0$

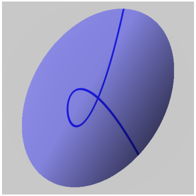


$y^2 - x^2 - x^3 = 0$

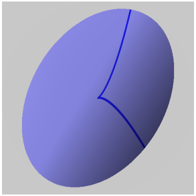
Kurven mit und ohne Singularitäten



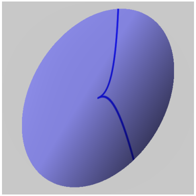
$$y^2 - x = 0$$



$$y^2 - x^2 - x^3 = 0$$

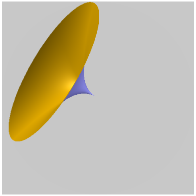


$$y^2 - x^3 = 0$$

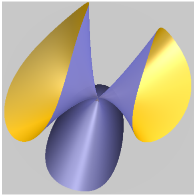


$$y^2 - x^5 = 0$$

Flächen mit isolierten und nicht-isolierten Singulartitäten

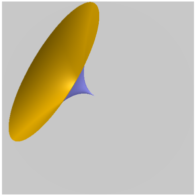


$V(x^2 + y^2 - z^5)$

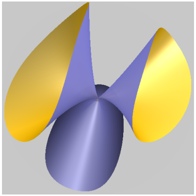


$V(x^2 + y^2 z - z^3)$

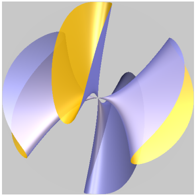
Flächen mit isolierten und nicht-isolierten Singulartitäten



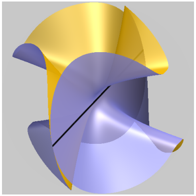
$V(x^2 + y^2 - z^5)$



$V(x^2 + y^2 z - z^3)$



$V(x^2 + y^4 - z^4 - 3x^2y^2)$



$V(x^2 - y^4 + x^2z^4)$

Wo ist $X = V(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ singulär?

Erinnerung:

X singulär in $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow$ Dimension des Tangentialraums in $\mathbf{a}$ größer als Dimension von X in $\mathbf{a}$

$\Leftrightarrow$ Rang der Jacobimatrix von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ kleiner als $n -$ Dimension von X in $\mathbf{a}$

Wo ist $X = V(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ singulär?

Erinnerung:

X singulär in $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow$ Dimension des Tangentialraums in $\mathbf{a}$ größer als Dimension von X in $\mathbf{a}$

$\Leftrightarrow$ Rang der Jacobimatrix von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ kleiner als $n -$ Dimension von X in $\mathbf{a}$

Für unsere Hyperflächen:

$$X \text{ singulär in } \mathbf{a} \Leftrightarrow grad(f)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Wo ist $X = V(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ singulär?

Erinnerung:

X singulär in $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow$ Dimension des Tangentialraums in $\mathbf{a}$ größer als Dimension von X in $\mathbf{a}$

$\Leftrightarrow$ Rang der Jacobimatrix von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ kleiner als $n -$ Dimension von X in $\mathbf{a}$

Für unsere Hyperflächen:

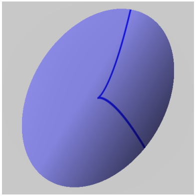
$$X \text{ singulär in } \mathbf{a} \Leftrightarrow grad(f)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

In den Bildern der ersten Seite:

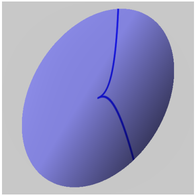
- Parabel $(y^2 - x = 0)$ nicht-singulär, da $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$
- Kuspe $(y^2 - x^3 = 0)$ singulär in $(0,0)$, da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Ist $y^2 - x^3 = 0$ 'weniger singulär' als $y^2 - x^5 = 0$?

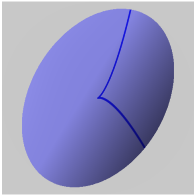


$A_2: \quad y^2 - x^3 = 0$

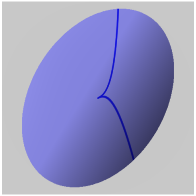


$A_4: \quad y^2 - x^5 = 0$

Ist $y^2 - x^3 = 0$ 'weniger singulär' als $y^2 - x^5 = 0$?



$A_2: \quad y^2 - x^3 = 0$

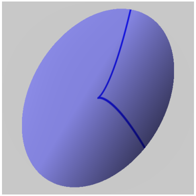


$A_4: \quad y^2 - x^5 = 0$

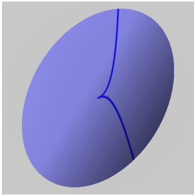
Erster Gedanke: Betrachte Ideale

$$\langle f \rangle, \ \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle, \ \langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$$

Ist $y^2 - x^3 = 0$ 'weniger singulär' als $y^2 - x^5 = 0$?



$A_2: \quad y^2 - x^3 = 0$



$A_4: \quad y^2 - x^5 = 0$

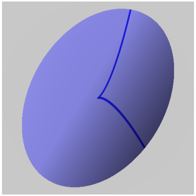
Erster Gedanke: Betrachte Ideale

$$\langle f \rangle, \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle, \langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$$

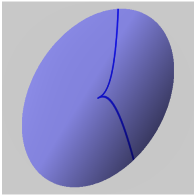
oder deren Quotienten

$$\mathbb{C}\{x, y\}/\langle f \rangle \text{ und } \mathbb{C}\{x, y\}/\langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$$

Ist $y^2 - x^3 = 0$ 'weniger singulär' als $y^2 - x^5 = 0$?



$A_2: \quad y^2 - x^3 = 0$



$A_4: \quad y^2 - x^5 = 0$

Erster Gedanke: Betrachte Ideale

$$\langle f \rangle,\ \langle \tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y} \rangle,\ \langle f, \tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y} \rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$$

oder deren Quotienten

$$\mathbb{C}\{x, y\}/\langle f \rangle \text{ und } \mathbb{C}\{x, y\}/\langle f, \tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y} \rangle$$

Vorteil: Werkzeuge der Kommutativen Algebra nutzbar!

Einige klassische Invarianten isolierter Singularitäten

Milnorzahl einer Hyperfläche $V(f)$:

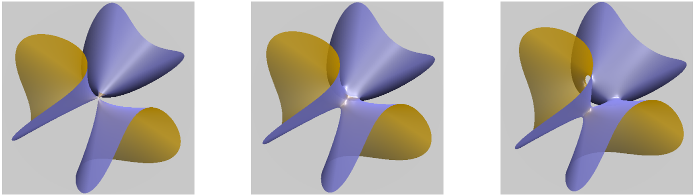
$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{x}\}/\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$$

Einige klassische Invarianten isolierter Singularitäten

Milnorzahl einer Hyperfläche $V(f)$:

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{x}\}/\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$$

geometrische Interpretation:

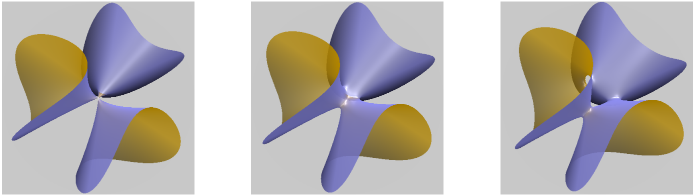


Einige klassische Invarianten isolierter Singularitäten

Milnorzahl einer Hyperfläche $V(f)$:

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{x}\} / \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$$

geometrische Interpretation:



Tjurinazahl:

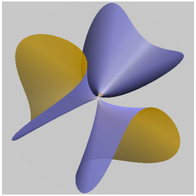
$$\tau := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{x}\} / \langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$$

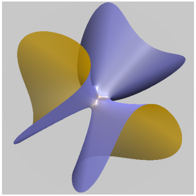
Einige klassische Invarianten isolierter Singularitäten

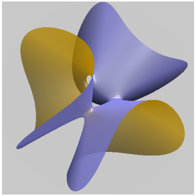
Milnorzahl einer Hyperfläche $V(f)$:

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{x}\}/\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$$

geometrische Interpretation:







Tjurinazahl:

$$\tau := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{x}\}/\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$$

Berechnung von Milnor- und Tjurinazahl

Erinnerung:
Berechnung von $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ für ein 0-dimensionales Ideal I:

- Berechne Groebner Basis $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ von I bzgl. Monomordnung (insbesondere $L(G) = L(I)$)
- $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/L(G) = dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$

Berechnung von Milnor- und Tjurinazahl

Erinnerung:
Berechnung von $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ für ein 0-dimensionales Ideal I:

- Berechne Groebner Basis $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ von I bzgl. Monomordnung (insbesondere $L(G) = L(I)$)
- $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/L(G) = dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$

Im lokalen Fall:

- selbe Berechnung, aber bzgl. lokal Monomordnung $(1 > x_i)$
- Problem: keine Wohlordnung, daher terminiert klassische Buchberger Normalform nicht
- Ausweg: Mora Normalform

Der Anfang der Klassifikation

Für ebene Kurven (vgl. erste Folie):
Milnorzahl: $\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$

curve	'A_0'	A_1	A_2	A_3 $y^2-x^4=0$	A_4	D_4 $x^3-y^3=0$
μ	0	1	2	3	4	4

Der Anfang der Klassifikation

Für ebene Kurven (vgl. erste Folie):
Milnorzahl: $\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$

curve	'A_0'	A_1	A_2	A_3 $y^2-x^4=0$	A_4	D_4 $x^3-y^3=0$
μ	0	1	2	3	4	4

Multiplizität: Ordnung von f,
d.h. kleinster Grad eines Monoms in f

Kurve	'A_0'	A_1	A_2	A_3	A_4	D_4
mult	1	2	2	2	2	3

Der Anfang der Klassifikation

Für ebene Kurven (vgl. erste Folie):
Milnorzahl: $\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x,y\}/\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$

curve	'A_0'	A_1	A_2	A_3 $y^2-x^4=0$	A_4	D_4 $x^3-y^3=0$
μ	0	1	2	3	4	4

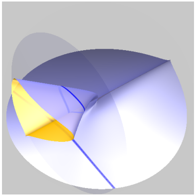
Multiplizität: Ordnung von f,
d.h. kleinster Grad eines Monoms in f

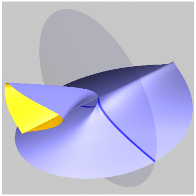
Kurve	'A_0'	A_1	A_2	A_3	A_4	D_4
mult	1	2	2	2	2	3

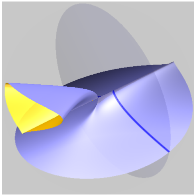
Viele weitere Invarianten von Singularitäten ebener Kurven oder Hyperflächen:
z.B. δ, Monodromie, Spectrum, ...

Familien von Kurven – Deformation einer A_4

$y^2 - x^5 - t \cdot x^3$:



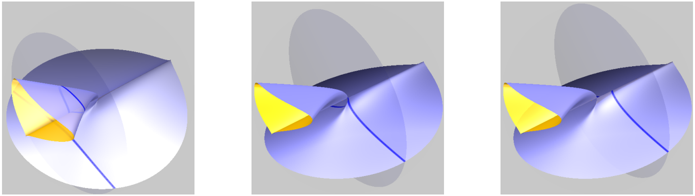




in Blau: Faser $t = -1$ (A_2) , $t = 0$ (A_4) und $t = 1$ (A_2)

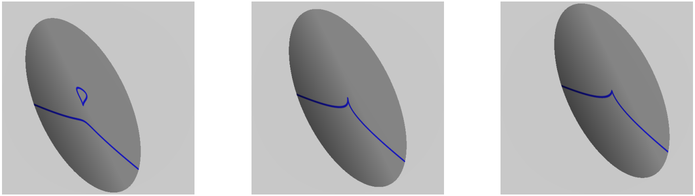
Familien von Kurven – Deformation einer A_4

$y^2 - x^5 - t \cdot x^3$:



in Blau: Faser $t = -1$ (A_2) , $t = 0$ (A_4) und $t = 1$ (A_2)

nochmals die Fasern:



Deformationen: Algorithmische Aufgaben

- Welche Typen von Singularitäten umfaßt einen gegebene Familie? (Klassifikation, auch Trivialität und Versalität von Familien)

Deformationen: Algorithmische Aufgaben

- Welche Typen von Singularitäten umfaßt einen gegebene Familie? (Klassifikation, auch Trivialität und Versalität von Familien)
- Welche Singularitäten können in Familien mit gegebener spezieller Faser auftauchen? (Adjacencies)

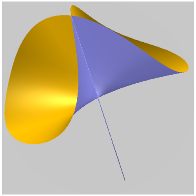
Deformationen: Algorithmische Aufgaben

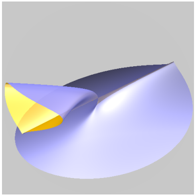
- Welche Typen von Singularitäten umfaßt einen gegebene Familie? (Klassifikation, auch Trivialität und Versalität von Familien)
- Welche Singularitäten können in Familien mit gegebener spezieller Faser auftauchen? (Adjacencies)
- Wieviele Parameter benötigt man für eine Familie mit alle möglichen Typen von Singularitäten? (Deformationene erster Ordnung)
- Gibt es Relationen unter diesen Parametern? (Obstruktionen)

Deformationen: Algorithmische Aufgaben

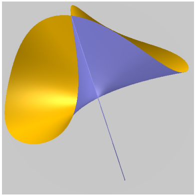
- Welche Typen von Singularitäten umfaßt einen gegebene Familie? (Klassifikation, auch Trivialität und Versalität von Familien)
- Welche Singularitäten können in Familien mit gegebener spezieller Faser auftauchen? (Adjacencies)
- Wieviele Parameter benötigt man für eine Familie mit alle möglichen Typen von Singularitäten? (Deformationene erster Ordnung)
- Gibt es Relationen unter diesen Parametern? (Obstruktionen)
- Kann man klassifizierende Räume konstruieren für Singularitäten mit bestimmten fixierten Eigenschaften? (Modulräume)

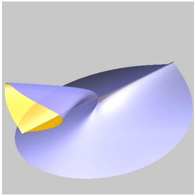
Einige nicht-isolierte Singularitäten

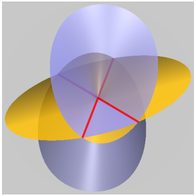


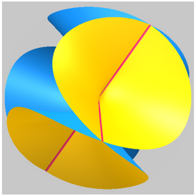


Einige nicht-isolierte Singularitäten









Singulärer Ort kann eine Kurve sein!

Neue Phänomene in höherer Dimension

Probleme:

- singulärer Ort nicht 0-dimensional

Neue Phänomene in höherer Dimension

Probleme:

- singulärer Ort nicht 0-dimensional
- die meisten Invarianten und Konstruktionen aus dem ersten Teil beschränkt auf isolierte Singularitäten

Neue Phänomene in höherer Dimension

Probleme:

- singulärer Ort nicht 0-dimensional
- die meisten Invarianten und Konstruktionen aus dem ersten Teil beschränkt auf isolierte Singularitäten
- singulärer Ort kann singulär sein

Neue Phänomene in höherer Dimension

Probleme:

- singulärer Ort nicht 0-dimensional
- die meisten Invarianten und Konstruktionen aus dem ersten Teil beschränkt auf isolierte Singularitäten
- singulärer Ort kann singulär sein

Also brauchen wir andere Werkzeuge!

Neue Phänomene in höherer Dimension

Probleme:

- singulärer Ort nicht 0-dimensional
- die meisten Invarianten und Konstruktionen aus dem ersten Teil beschränkt auf isolierte Singularitäten
- singulärer Ort kann singulär sein

Also brauchen wir andere Werkzeuge!

Beispiel: Desingularisierung

Aufblasung, einfachster Fall

Idee: ersetze Punkt in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ durch projektive Gerade

Aufblasung, einfachster Fall

Idee: ersetze Punkt in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ durch projektive Gerade

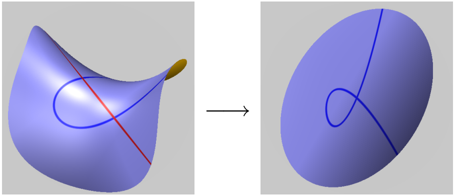
Effekt: mehr Raum, damit Kurven glatt werden können

Aufblasung, einfachster Fall

Idee: ersetze Punkt in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ durch projektive Gerade

Effekt: mehr Raum, damit Kurven glatt werden können

in Bildern (nur eine Karte):



Aufblasung: Berechnung

X affine Varietät (Ideal $I_X \subset K[x_1, \ldots, x_n]$)
C glatte Untervarietät von X
(oBdA $I_C = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$)

Aufblasung: Berechnung

X affine Varietät (Ideal $I_X \subset K[x_1, \ldots, x_n]$)
C glatte Untervarietät von X
(oBdA $I_C = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$)

totale Transformierte $X'_{total} \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$:

Aufblasung: Berechnung

X affine Varietät (Ideal $I_X \subset K[x_1, \ldots, x_n]$)
C glatte Untervarietät von X
(oBdA $I_C = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$)

totale Transformierte $X'_{total} \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$:
ist Urbild von I_X unter

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k] & \longrightarrow & K[x_1, \ldots, x_n, t] \\ x_i & \longmapsto & x_i \\ y_j & \longmapsto & t \cdot f_j \end{array}$$

Aufblasung: Berechnung

X affine Varietät (Ideal $I_X \subset K[x_1, \ldots, x_n]$)
C glatte Untervarietät von X
(oBdA $I_C = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$)

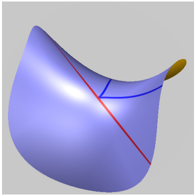
totale Transformierte $X'_{total} \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$:
ist Urbild von I_X unter

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k] & \longrightarrow & K[x_1, \ldots, x_n, t] \\ x_i & \longmapsto & x_i \\ y_j & \longmapsto & t \cdot f_j \end{array}$$

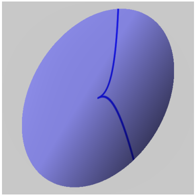
algorithmisch: Gröbner Basis Berechnung in $n + k + 1$
Variablen bzgl. Eliminationsordnung für t

Eine Aufblasung reicht oft nicht

Aufblasung einer A_4 im Ursprung (nur eine Karte):

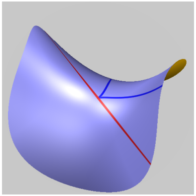


$\longrightarrow$

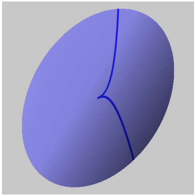


Eine Aufblasung reicht oft nicht

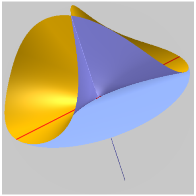
Aufblasung einer A_4 im Ursprung (nur eine Karte):



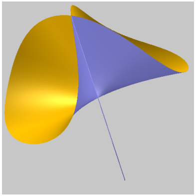
$\longrightarrow$



Whitney's Regenschirm – unverändert unter einer Aufblasung im Ursprung (in einer Karte):



$\longrightarrow$



Grundidee der Konstruktion

Theorem(Hironaka, 1964):
Jede algebraische Varietät über einem Körper der Charakteristik Null kann durch eine endliche Folge von Aufblasungen desingularisiert werden.

Grundidee der Konstruktion

Theorem(Hironaka, 1964):
Jede algebraische Varietät über einem Körper der Charakteristik Null kann durch eine endliche Folge von Aufblasungen desingularisiert werden.

Anwendungen:

- Eigenschaften/Invarianten von Singularitäten
- birationale Invarianten von Varietäten
- algebraische Statistik

(Modellselektion bei verborgenen Variablen)

Grundidee der Konstruktion

Theorem(Hironaka, 1964):
Jede algebraische Varietät über einem Körper der Charakteristik Null kann durch eine endliche Folge von Aufblasungen desingularisiert werden.

Anwendungen:
- Eigenschaften/Invarianten von Singularitäten
- birationale Invarianten von Varietäten
- algebraische Statistik

(Modellselektion bei verborgenen Variablen)

zentrales Problem: Wahl geeigneter Zentren

Algorithmische Werkzeuge: Standard Basen, Idealquotienten, Saturierung, weitere spezieller Algorithmen

Desingularisierung: Einfachste Formulierung des Problems

Gegeben: algebraische Varietät X
(über $\mathbb{C}$)

Desingularisierung: Einfachste Formulierung des Problems

Gegeben: algebraische Varietät X
(über $\mathbb{C}$)

Gesucht: Desingularisierung von X, d.h.

Desingularisierung: Einfachste Formulierung des Problems

Gegeben: algebraische Varietät X
(über $\mathbb{C}$)

Gesucht: Desingularisierung von X, d.h.

- Varietät $\tilde{X}$, nicht-singulär
- eigentlicher birationaler Morphismus
  $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$

Desingularisierung: Einfachste Formulierung des Problems

Gegeben: algebraische Varietät X
(über $\mathbb{C}$)

Gesucht: Desingularisierung von X, d.h.

- Varietät $\tilde{X}$, nicht-singulär
- eigentlicher birationaler Morphismus
  $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$

so daß $\mathrm{Reg}(X) \cong \pi^{-1}(\mathrm{Reg}(X))$

Desingularisierung als Aufgabe der Computeralgebra

1964	Hironakas nicht konstruktiver Beweis
ca. 1990	erste algorithmische Beweise (Villamayor, Bierstone-Milman)
ca. 2001	erste Prototyp-Implementierung (Bodnar-Schicho in Maple)
ca. 2004	erste praktisch nutzbare Implementierung (FK-Pfister in Singular)

Strategie der Zentrumswahl

verbessere stets die 'schlimmsten' Singularitäten

Strategie der Zentrumswahl

verbessere stets die 'schlimmsten' Singularitäten

einfachster Fall: ebene Kurvensingularitäten

singulärer Ort besteht aus endlich vielen Punkten

Strategie der Zentrumswahl

verbessere stets die 'schlimmsten' Singularitäten

einfachster Fall: ebene Kurvensingularitäten

singulärer Ort besteht aus endlich vielen Punkten

Flächensingularitäten:

Komponenten des sing. Ortes können (singuläre) Kurven sein

Wann blasen wir in Punkten auf, wann in Kurven?

Strategie der Zentrumswahl

verbessere stets die 'schlimmsten' Singularitäten

einfachster Fall: ebene Kurvensingularitäten

  singulärer Ort besteht aus endlich vielen Punkten

Flächensingularitäten:

  Komponenten des sing. Ortes können
    (singuläre) Kurven sein

  Wann blasen wir in Punkten auf, wann in Kurven?

Wie bestimmen wir allgemein die 'schlimmsten' Singularitäten?

Die steuernde Invariante

'schlimmste' Singularitäten als Ort maximalen Wertes der steuernden Invariante

Die steuernde Invariante

'schlimmste' Singularitäten als Ort maximalen Wertes der steuernden Invariante

Anforderungen an die steuernde Invariante:

(a) Ort maximalen Wertes Zariski-abgeschlossen (Zariski-Oberhalbstetigkeit der Invariante)

(b) Ort maximalen Wertes nicht-singulär

(c) Ort maximalen Wertes hat normale Schnitte mit den exzeptionellen Divisoren

Die steuernde Invariante

'schlimmste' Singularitäten als Ort maximalen Wertes der steuernden Invariante

Anforderungen an die steuernde Invariante:

(a) Ort maximalen Wertes Zariski-abgeschlossen (Zariski-Oberhalbstetigkeit der Invariante)
(b) Ort maximalen Wertes nicht-singulär
(c) Ort maximalen Wertes hat normale Schnitte mit den exzeptionellen Divisoren
(d) maximaler Wert kann unter Aufblasung nicht ansteigen
(e) Sinken des maximalen Wertes als Maß für die Verbesserung der Singularitäten

Struktur der steuernden Invariante

$$(inv_d; inv_{d-1}; \ldots; inv_2)$$

Struktur der steuernden Invariante

$$(inv_d; inv_{d-1}; \ldots; inv_2)$$

zentrale Konstruktion in Hironakas Argumentation:
Dimensionsabstieg des umgebenden Raumes

Struktur der steuernden Invariante

$$(inv_d; inv_{d-1}; \ldots; inv_2)$$

zentrale Konstruktion in Hironakas Argumentation:
Dimensionsabstieg des umgebenden Raumes

Grundidee mit $ord_{\underline{0}}(f)$ als inv_d:
Betrachte

$$f = z^k + a_1(\underline{x})z^{k-1} + \cdots + a_k(\underline{x}) \subset \mathbb{C}\{z, \underline{x}\}$$

Struktur der steuernden Invariante

$$(inv_d; inv_{d-1}; \ldots; inv_2)$$

zentrale Konstruktion in Hironakas Argumentation:
Dimensionsabstieg des umgebenden Raumes

Grundidee mit $ord_{\underline{0}}(f)$ als inv_d:
Betrachte

$$f = z^k + a_1(\underline{x})z^{k-1} + \cdots + a_k(\underline{x}) \subset \mathbb{C}\{z, \underline{x}\}$$

Wissen: $ord_{\underline{0}}(f) = k \iff ord_{\underline{0}}(a_i) \geq i \;\; \forall 1 \leq i \leq k$

Struktur der steuernden Invariante

$$(inv_d; inv_{d-1}; \ldots; inv_2)$$

zentrale Konstruktion in Hironakas Argumentation:
Dimensionsabstieg des umgebenden Raumes

Grundidee mit $ord_{\underline{0}}(f)$ als inv_d:
Betrachte

$$f = z^k + a_1(\underline{x})z^{k-1} + \cdots + a_k(\underline{x}) \subset \mathbb{C}\{z, \underline{x}\}$$

Wissen: $ord_{\underline{0}}(f) = k \iff ord_{\underline{0}}(a_i) \geq i \;\; \forall 1 \leq i \leq k$

daher: $ord_{\underline{0}}(f) = k \iff ord_{\underline{0}}(\langle a_1^{k!}, a_2^{\frac{k!}{2}}, \ldots a_k^{(k-1)!}\rangle \geq k!$

Kernprobleme der Desingularisierung

in Charakteristik Null – nur Effizienz betreffend:

- für singuläre Orte höherer Dimension
  Punktaufblasungen nicht ausreichend
- singulärer Ort hat Struktur (z.B. Singularitäten)
- ungeeignete Zentrumswahl kann Situation verschlechtern

Kernprobleme der Desingularisierung

in Charakteristik Null – nur Effizienz betreffend:

- für singuläre Orte höherer Dimension Punktaufblasungen nicht ausreichend
- singulärer Ort hat Struktur (z.B. Singularitäten)
- ungeeignete Zentrumswahl kann Situation verschlechtern
- extrem hohe Datenmenge durch bis zu n neue Karten pro Aufblasung
- Verkleben verschiedener Karten

Kernprobleme der Desingularisierung

in Charakteristik Null – nur Effizienz betreffend:

- für singuläre Orte höherer Dimension Punktaufblasungen nicht ausreichend
- singulärer Ort hat Struktur (z.B. Singularitäten)
- ungeeignete Zentrumswahl kann Situation verschlechtern
- extrem hohe Datenmenge durch bis zu n neue Karten pro Aufblasung
- Verkleben verschiedener Karten

in positiver Charakteristik – grundlegende Hindernisse:

- Hyperflächen maximalen Kontaktes existieren u.U. nicht
- Ordnung eines Ideals kann unter Aufblasung steigen